「先天性の頑固さ」と筋金入りの頑固さ」との違いについて(位相.次元.集合 : 未解決問題と応用)

寺澤, 順

数理解析研究所講究録
649巻 1988年 122-125

「先天性の頑固さ」と「筋金入りの頑固さ」との違いについて

防衛大学校　寺澤　順(Jun Terasawa)

1．continuum は、その autohomeomorphism が 恒等写像に限るとき、頑固(rigid)であると言われる。先天的に頑固(hereditarily rigid)とは、その子供たち(subcontinua)がすべて頑固なことを言う。また、そのどの2人のまともな(non-degenerate)子供たちも、互いに同相でないとき、この continuum を、筋金入りに頑固(strongly rigid)と言う。筆者は、数か月前に用意した論文[1]の中で、頑固な continuum が、かなりたくさん存在することを、Jordan-Brouwer Separation Theorem を用いて示した。そこでも述べたように、先天的ないし筋金入りに頑固な continuum についても同じことが言えるかどうかは興味深い問題である。

2．[1]で、つぎの単純な定理が成立することを、述べ

ておいた。

『頑固さは、筋金入りならば、先天性である。』

この定理の逆は、一般には成り立たない。

事実、筋金入りに頑固な continuum Z 及びそのなかの2点 a、b を任意に取る。この Z としては、例えば、[1] に引用した（引用しただけで使わなかったが）Anderson-Choquet や Cook、或いは、極く最近の Maćkowiak の論文で構成されているものでよい。そして、積空間 $Z\times\{0,1\}$ において2点 $(a,0)$ と $(b,1)$ とを同一視して得られる商空間 X（当然、continuum である）を取ると、この X は、先天的に頑固であるが、筋金入りにはそうでない。

それを見るために、まず、$\psi:Z\times\{0,1\}\to X$ を商写像とし $p=\psi(a,0)=\psi(b,1)$、$Z_i=\psi[Z\times\{i\}]$ とする。X は互いに同相な2人の子供たち Z_0、Z_1 を含み、筋金入りには頑固でない。

X が先天的に頑固であることを見よう。

X の任意のまともな子供 K を取り、$h:K\to K$ を同相写像とする。h＝恒等写像を示せばよい。

$K\subseteq Z_i$ for either i なら、明白である。

$K\cap Z_i\setminus\{p\}\neq\phi$ for both i とすると、$p\in K$ でなければならない。$K_i=K\cap Z_i$ が continuum であることを見るのは

それほど難しくない。

$h(p)\neq p$ とすると、例えば $h(p)\in K_0\setminus\{p\}$ である。$h^{-1}[K_0\setminus\{p\}]$ を考えれば、Janiszewskiの定理から、K_0の、p を含む、まともな子供 C が、$h[C]\subseteq K_0\setminus\{p\}$ と取れる。C、$h[C]$は、それぞれ、Z の子供に同相で、一方は a を含み、他方は含まないので、ここに、Z の性質に反して不合理である。

よって、$h(p)=p$ である。

$h[K_0]\not\subseteq K_0$とすると、$h[K_0]\cap K_1=A$ はまともな continuum であり、$h^{-1}[A]\subseteq K_0$と同相である。ところが、$A\subseteq K_1$は、Z の b を含む子供と同相であり、$h^{-1}[A]$は、a を含む子供と同相である。しかも、h は、この2人の子供たちの間で a を b に写す同相写像を導く。これは Z の性質に反する。

従って、$h[K_0]\subseteq K_0$であり、同様に、$h[K_1]\subseteq K_1$である。

Z の標記の性質から、$h|K_0$も$h|K_1$も恒等写像であり、ここに、h が恒等写像であることが導かれる。

そこで、問題。

すぐわかるように、ここで構成した X は decomposableである。同じ性質を持った indecomposable continuum X を作れるかどうか？

文献：

[1] "Rigid continua are everywhere" (by the author), in preparation.